

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang)

Môn thi : TOÁN

Thời gian : 180 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi : 08 /10/2020

Câu 1. (3,0 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - x - 3 + x\sqrt{x^2 + 1} = (y + 1)\sqrt{y^2 + 2y + 2} \\ x^2 + y^2 = x - 2y + 2 \end{cases}$$

Câu 2. (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 1; u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2u_n + 3} - \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 3} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn tâm O và ngoại tiếp đường tròn tâm I . Đường thẳng qua I vuông góc với AI cắt đường thẳng BC tại S . Gọi M là trung điểm BC , D là điểm chính giữa cung nhỏ BC của đường tròn (O) và J là điểm đối xứng với I qua O .

a) Chứng minh tam giác DBI cân và tam giác DSJ vuông.

b) Gọi X là hình chiếu của điểm S trên đường thẳng OI và Y là giao điểm thứ hai của MI và đường tròn ngoại tiếp tam giác OMS . Chứng minh ba điểm A, X, Y thẳng hàng.

Câu 4. (2,0 điểm) Gọi α, β là các nghiệm của phương trình $x^2 - ax + a = 0$, trong đó a là một số nguyên lớn hơn 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m, n thì $[m\alpha] \neq [n\beta]$ với $[x]$ là ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Câu 5. (3,0 điểm) Cho dãy đa thức hệ số thực $\{f_n(x)\}$ xác định bởi:

$$f_0(x) = 2; f_1(x) = 2x; f_{n+2}(x) = 2x \cdot f_{n+1}(x) + (1 - x^2) f_n(x) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $f_n(x)$ chia hết cho $x^2 + 3$.

Câu 6. (2,0 điểm) Một số tự nhiên được gọi là số “thân thiện” nếu nó có thể phân tích được thành tích của một số các số nguyên dương mà tổng của chúng bằng 2020. Hãy tìm số “thân thiện” lớn nhất.

Câu 7. (3,0 điểm) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = abc + 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c).$$

HẾT

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:.....

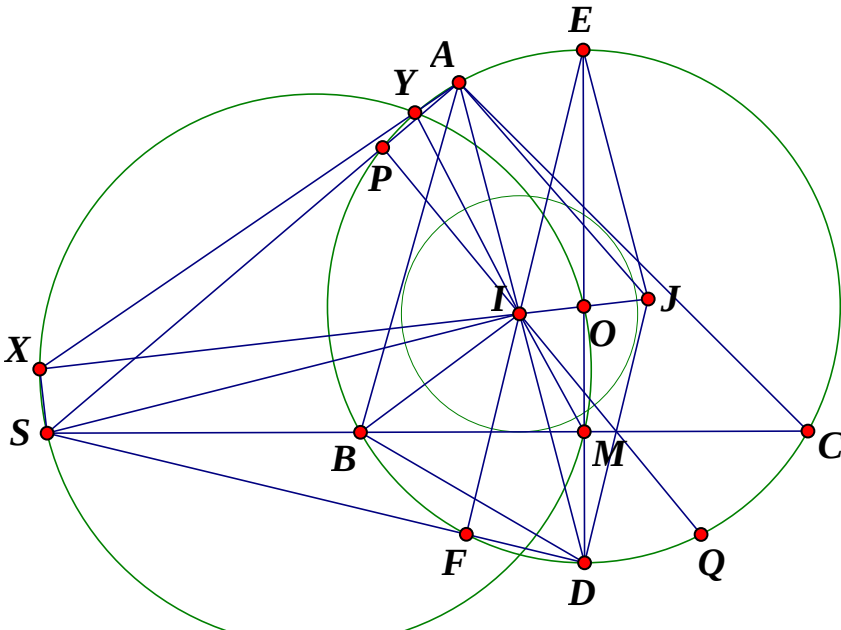
HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

Môn: TOÁN

(Hướng dẫn chấm này gồm có 5 trang)

Câu	Nội dung yêu cầu	Điểm
Câu 1 (3,0đ)	.	
	Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - x - 3 + x\sqrt{x^2 + 1} = (y+1)\sqrt{y^2 + 2y + 2} & (1) \\ x^2 + y^2 = x - 2y + 2 & (2) \end{cases}$ Từ (1) và (2), trừ vế với vế ta có: $x^2 - x - 3 + x\sqrt{x^2 + 1} - y^2 = (y+1)\sqrt{y^2 + 2y + 2} - x + 2y - 2$ $\Leftrightarrow x^2 + x\sqrt{x^2 + 1} = (y+1)^2 + (y+1)\sqrt{(y+1)^2 + 1} \quad (3)$ Xét hàm số $f(t) = t^2 + t\sqrt{t^2 + 1}$ trên R, ta có $f'(t) = 2t + \sqrt{t^2 + 1} + t \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{2t\sqrt{t^2 + 1} + t^2 + 1 + t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{(\sqrt{t^2 + 1} + t)^2}{\sqrt{t^2 + 1}}$ Do đó $f'(t) > 0$ với mọi $t \in R$ hay $f(t)$ đồng biến trên R. (0.25) Khi đó (3) có dạng $f(x) = f(y+1) \Leftrightarrow x = y+1$. (0.25) Thay $x = y+1$ vào (2) ta được $(y+1)^2 + y^2 = (y+1) - 2y + 2$ (0.25) $\Leftrightarrow 2y^2 + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \Rightarrow x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (0.25)$ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) \in \left\{(-1; -2); \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}$	
Câu 2 (2,0đ)		
	Từ giả thiết $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{4u_n}{\sqrt{u_n^2 + 2u_n + 3} + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 3}}$ suy ra $u_n > 0 \quad \forall n \in N^*$. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$ (0.25)	

	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{(x-1)^2 + 2} = (x-1)\sqrt{(x+1)^2 + 2}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-1) \geq 0 \\ (x+1)^2[(x-1)^2 + 2] = (x-1)^2[(x+1)^2 + 2] \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-1) \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$ Suy ra $f'(x)$ không đổi dấu trên $(0; +\infty)$. Hơn nữa $f'(1) > 0$ nên $f'(x) > 0$ trên $(0; +\infty)$ hay $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. (0,25) (Chú ý cách khác : Bằng cách xét hàm $g(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2}}$ đồng biến suy ra $f'(x) = g(x+1) - g(x-1) > 0; \forall x > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến})$	
	Giả sử $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2u_n + 3} - \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 3} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{u_n^2 + 2u_n + 3} < \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 3} + 2$ $\Leftrightarrow u_n^2 + 2u_n + 3 < u_n^2 - 2u_n + 3 + 4\sqrt{u_n^2 - 2u_n + 3} + 4 \Leftrightarrow u_n - 1 < \sqrt{(u_n - 1)^2 + 2}$ Luôn đúng với mọi $u_n > 0$, suy dãy bị chặn trên bởi 2, do đó dãy hội tụ (0,25)	
	Đặt $L = \lim u_n$. Từ định nghĩa dãy số ta có $1 \leq L \leq 2$ và $L = \sqrt{L^2 + 2L + 3} - \sqrt{L^2 - 2L + 3}$ $\Leftrightarrow L^2 = 2L^2 + 6 - 2\sqrt{(L^2 + 3)^2 - 4L^2} \text{ (vì hai vế đều dương)}$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{L^4 + 2L^2 + 9} = L^2 + 6 \Leftrightarrow 4(L^4 + 2L^2 + 9) = L^4 + 12L^2 + 36$ $\Leftrightarrow L^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow L = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ (vì } 1 < L \leq 2 \text{)}$ Vậy (u_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim u_n = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (0,25)	
Câu 3		(5,0đ)
a (3,0đ)	(Không cho điểm hình vẽ, nhưng không có hình không chấm câu 3)	

	Xét tam giác DBI có $\angle DBI = \angle DBC + \angle CBI = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) \quad (0.5)$ và $\angle DIB = \angle IAB + \angle IBA = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$ nên tam giác DBI cân tại D. (0.5) Kẻ đường kính DE của đường tròn (O), khi đó ta có $DIEJ$ là hình bình hành, do đó $\angle JDE = \angle DEI$. Ta lại có tam giác DBE vuông tại B, đường cao BM nên $DM \cdot DE = DB^2 = DI^2$, suy ra $\frac{DM}{DI} = \frac{DI}{DE}$. (0.25) Do đó $\triangle DMI \sim \triangle DIE \Rightarrow \angle DEI = \angle DIM$. (0.25) Mặt khác $DSIM$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle DIM = \angle DSM$. Từ đó suy ra $\angle JDE = \angle DEI = \angle DIM = \angle DSM$, (0.25) Nên $\angle JDS = \angle JDE + \angle EDS = \angle DSM + \angle MDS = 90^\circ$. Vậy tam giác DSJ vuông tại D. (0.25)	
	<i>Cách khác ch/m tam giác DSJ vuông tại D:</i> Ch/m tứ giác $EIDJ$ là hb hành $\Rightarrow EI // JD$. Gọi F là giao điểm thứ hai của SD và (O), ta có SI là tiếp tuyến đường tròn (BIC) nên $SI^2 = SB \cdot SC = SF \cdot SD$. Suy ra $IF \perp SD$ mà $EF \perp SD$ nên E, I, F thẳng hàng. Suy ra $DJ \perp SD$ hay tam giác DSJ vuông.	
b (2,0đ)	 Gọi P là giao điểm khác A của SA và (O), Q là giao điểm khác P của PI và (O). Ta có các tam giác DBI, DCI đều cân ở D nên D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC. (0.25) Do đó SI là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC nên $SI^2 = SB \cdot SC = SP \cdot SA$ (0.25) Lại có tam giác SAI vuông ở I nên suy ra $IP \perp SA$ và do đó AQ là đường kính của (O). Tứ giác $AIQJ$ là hình bình hành, do đó $AJ // PQ$ suy ra $AJ \perp SA$. (0.25) Như vậy $\angle SAJ = \angle SDJ = \angle SXJ = 90^\circ$ nên A, X, S, D, J nằm trên một đường tròn. (0.25) Từ đó ta có $\angle AXO = \angle AXJ = \angle ADJ = 90^\circ - \angle IDS = \angle ISD = \angle IMO$ (1)	

	Mặt khác tứ giác $XYOM$ nội tiếp nên ta có $\angle YXO = \angle YMO = \angle IMO$ (2) (0.25) Từ (1) và (2) ta có $\angle AXO = \angle YXO$ nên ba điểm A, X, Y thẳng hàng. (0.25)	
Câu 4 (2,0đ)		
	Xét phương trình $x^2 - ax + a = 0$ (1) trong đó a là số nguyên lớn hơn 4. Phương trình (1) có biệt thức $\Delta = a^2 - 4a > 0$ và nên hai nghiệm α, β phân biệt. Nếu $a^2 - 4a = k^2, k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow (a-2)^2 - k^2 = 4$ $\Leftrightarrow [(a-2)-k] \cdot [(a-2)+k] = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)-k=1 \\ (a-2)+k=4 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{3}{2} \text{ vô lý.} \quad (0.25)$ Do đó $\alpha, \beta \in \left\{ \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right\}$ là các số vô tỷ. (0.25)	
	Theo định lý Viet thì $\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = a \end{cases}$ với $a > 4$ suy ra α, β là các số vô tỷ dương (0.25) Và $\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = a \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha\beta \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1. \quad (0.25)$	
	Giả sử tồn tại hai số nguyên dương m, n mà $[m\alpha] = [n\beta]$. Đặt $[m\alpha] = [n\beta] = k, k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó ta có $\begin{cases} k = [m\alpha] \\ k = [n\beta] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < m\alpha < k+1 \\ k < n\beta < k+1 \end{cases} \quad (\text{vì } m\alpha, n\beta \text{ là các số vô tỷ}) \quad (0.25)$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{k+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m}{k} \\ \frac{n}{k+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{n}{k} \end{cases} \quad (0.25)$	
	Cộng lại ta được: $\frac{m+n}{k+1} < 1 < \frac{m+n}{k} \Rightarrow k < m+n < k+1 \text{ vô lý.} \quad (0.25)$ Vậy với mọi số nguyên dương m, n thì $[m\alpha] \neq [n\beta]$. (0.25)	
Câu 5 (3,0đ)		
	Từ giả thiết ta có $f_{n+2}(x) - [(x+1) + (x-1)] \cdot f_{n+1}(x) + [(x+1) \cdot (x-1)] \cdot f_n(x) = 0 \quad (0.25)$ nên $f(x)$ có dạng $f_n(x) = A \cdot (x+1)^n + B \cdot (x-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (0.25)$	
	Lại do $f_0(x) = 2$ và $f_1(x) = 2x$ nên ta có hệ $\begin{cases} A+B=2 \\ A(x+1)+B(x-1)=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases} \quad (0.25)$ Vậy $f_n(x) = (x+1)^n + (x-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}. \quad (0.25)$	
	Thử trực tiếp ta thấy $f_3(x) = (x+1)^3 + (x-1)^3 = (2x^3 + 6x) : (x^2 + 3) \quad (0.25)$ Lại có $(x+1)^6 - (x-1)^6 = [(x+1)^3 + (x-1)^3] \cdot [(x+1)^3 - (x-1)^3] : (x^2 + 3). \quad (0.25)$	

	Đặt $n = 6k + r$ trong đó $k \in \mathbb{N}$ và $r \in \{0; 1; 2; 3, 4, 5\}$. Ta có $f_n(x) = (x+1)^n + (x-1)^n = (x+1)^{6k+r} + (x-1)^{6k+r} =$ $= (x+1)^r \left[(x+1)^{6k} - (x-1)^{6k} \right] + (x-1)^{6k} \left[(x+1)^r + (x-1)^r \right]$ $= (x+1)^r \left[(x+1)^{6k} - (x-1)^{6k} \right] + (x-1)^{6k} \cdot f_r(x). \quad (0.25)$ Suy ra $f_n(x) : x^2 + 3$ khi và chỉ khi $f_r(x) : x^2 + 3$. (0.25)	
	Thử trực tiếp ta thấy $f_0(x) = 2 \nmid (x^2 + 3) \quad f_1(x) = 2x \nmid (x^2 + 3)$ $f_2(x) = 2x^2 + 2 \nmid (x^2 + 3) \quad f_3(x) = 2x(x^2 + 3) : (x^2 + 3)$	
	$f_4(x) = 2(x^4 + 6x^2 + 1) \nmid (x^2 + 3) \quad f_5(x) = 2x(x^4 + 10x^2 + 5) \nmid (x^2 + 3)$ Vậy các giá trị cần tìm của n là $n = 6k + 3$ với $k \in \mathbb{N}$.	
	Cách khác câu 5 (sử dụng nghiệm phức) Xét phương trình đặc trưng của dãy đa thức : $t^2 - 2xt - (1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow t_1 = x + 1; t_2 = x - 1$ nên $f(x)$ có dạng $f_n(x) = A(x+1)^n + B(x-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (0.5) giải ra $A=B=1 \Rightarrow f_n(x) = (x+1)^n + (x-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. (0.5) Theo đề $f_n(x) : x^2 + 3$ Ta có $x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm i\sqrt{3}$ nên $f_n(x) : x^2 + 3 \Leftrightarrow f_n(\pm i\sqrt{3}) = 0$ (0.5) $x = i\sqrt{3} \Rightarrow x + 1 = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right);$ Với $x - 1 = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ (0.5) $f_n(x) = (x+1)^n + (x-1)^n = 2^n \left[\left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) + \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3} \right) \right]$ Khi đó $= 2^n \left[\left(\cos \frac{n\pi}{3} + \cos \frac{2n\pi}{3} \right) + i \left(\sin \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right) \right]$ $= 2^{n+1} \left[\cos \frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{6} \right] \quad (0.25)$ Ta có $f_n(i\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{6} = \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow n = 6k + 3$ (0.5) Tương tự $f_n(-i\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow n = 6k + 3$ (0.25)	
Câu 6 (2,0đ)		
	Giả sử S là số “thân thiện” lớn nhất cần tìm và có thể phân tích được $S = a_1 \cdot a_2 \dots a_k$ trong đó $a_i \in \mathbb{N}^*$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 2020$. Nếu tồn tại một số, chẳng hạn là $a_1 = 1$ thì ta viết $S = 1 \cdot a_2 \dots a_k < (a_2 + 1) a_3 \dots a_k$, mâu thuẫn với giả sử $S = a_1 \cdot a_2 \dots a_k$ là số “thân thiện” lớn nhất. (0.25) Nếu tồn tại một số bằng 4, ta có thể thay số 4 đó bởi hai số 2 thì tổng và tích đều không đổi. (0.25)	

	Nếu tồn tại một số, chẳng hạn $a_1 \geq 5$ thì do $3(a_1 - 3) > a_1$ nên ta viết $S = a_1.a_2...a_k < 3.(a_1 - 3).a_2...a_k \text{ cũng mâu thuẫn với giả sử } S \text{ lớn nhất.} \quad (0.25)$ Như vậy suy ra $a_i = 2$ hoặc $a_i = 3$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$. (0.25)	
	Ta giả sử $a_1 = a_2 = \dots = a_j = 2$ và $a_{j+1} = a_{j+2} = \dots = a_k = 3$. Nếu $j \geq 3$ thì $a_1 = a_2 = a_3 = 2$ nên $a_1 + a_2 + a_3 = 6 = 3 + 3$. (0.25) Do đó $3 + 3 + \sum_{i=4}^k a_i = 2020$ nhưng $3^2.a_4.a_5...a_k > 2^3.a_4.a_5...a_k$ nên mâu thuẫn với giả thiết S. (0.25)	
	Do vậy $j = 1$ hoặc $j = 2$. Ta thấy $j = 1$ không thỏa mãn. (0.25) Với $j = 2$ ta được số thỏa mãn là $S = 2^2.3^{672}$. Vậy số “thân thiện” lớn nhất cần tìm là $S = 2^2.3^{672}$. (0.25)	
Câu 7 (3,0đ)		
	Ta có $P = abc + 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) = (a + 2)(b + 2)(c + 2) - 8$. (0.25) Từ giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ta có $a, b, c \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ nên $a + 2, b + 2, c + 2 > 0$. (0.25)	
	Tìm GTLN của P : Ta có $a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = 3$ nên $P \leq \left(\frac{a + b + c + 6}{3}\right)^3 - 8 \leq 27 - 8 = 19$. (0.25) Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$. Vậy GTLN của P là 19. (0.25)	
	Tìm GTNN của P. Do $a, b, c \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ nên P đạt GTNN khi $a, b, c < 0$. (0.25) Không bất tính tổng quát ta giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow a^2 \geq b^2 \geq c^2$, kết hợp với $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ta có $c^2 \leq 1$ nên $c \in [-1; 0]$. (0.25)	
	Ta lại có : $2(a + 2)(b + 2) = 2ab + 4a + 4b + 8 =$ $a^2 + b^2 + 4 + 2ab + 4a + 4b + c^2 + 1 = (a + b + 2)^2 + c^2 + 1 \geq c^2 + 1 \quad (0.25)$ nên $(a + 2)(b + 2) \geq \frac{1}{2}(c^2 + 1)$. (0.25)	
	Do đó : $P = (a + 2)(b + 2)(c + 2) - 8 \geq \frac{1}{2}(c^2 + 1)(c + 2) - 8$ (0.25) Xét hàm số $f(c) = \frac{1}{2}(c^2 + 1)(c + 2) - 8$ trên $[-1; 0]$, ta có $f'(c) = \frac{1}{2}(3c^2 + 4c + 1)$. Suy ra $f'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases}$. (0.25)	0,5
	Lập bảng biến thiên của $f(c)$ trên $[-1; 0]$ ta được $\min_{[-1; 0]} f(c) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{191}{27}$. (0.25) Suy ra $P \geq -\frac{191}{27}$, đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a = -\frac{5}{3}; b = c = -\frac{1}{3}$. Vậy GTNN của P là $-\frac{191}{27}$. (0.25)	0,5