

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG BÌNH THUẬN

NĂM HỌC 2023-2024

Phạm Minh Trí- cựu HS THPT chuyên Trần Hưng Đạo

1. Đề bài

Bài 1:

a) Cho hàm số đa thức $f(x)$ có bảng biến thiên như bên dưới:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			$\nearrow 3$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$	

Biết rằng $f(-3) + 1 < 0$; $f(3) - 3 > 0$. Đặt $g(x) = f(3x)$, $\max_{[-1;1]} g(x) =$

$g(x_1)$; $\min_{[-1;1]} g(x) = g(x_2)$. Tính $x_1 - x_2$

b) Cho hàm số $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - (m-1)x + \frac{7}{11}$. Tìm m để hàm số có đúng hai điểm cực trị trên $(-2; 3)$.

Bài 2:

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + \sqrt{5x} = \sqrt{3x+6} + \sqrt{3x-4}$

b) Giải bất phương trình:

$$\frac{x - \sqrt{x} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)}} \geq 1$$

Bài 3: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 2$; $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2024} + \frac{2023}{2024}u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Chứng minh $u_n > 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$ và dãy (u_n) tăng.

b) Đặt $v_n = \frac{u_n}{u_{n+1}-1}$. Chứng minh $v_1 + v_2 + \dots + v_n < 2024 \forall n \in \mathbb{N}^*$

Bài 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB < AC$. D là điểm nằm trên cung nhỏ BC (D khác B, C) và $DB < DC$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D lên đường thẳng BC, AC .

a) Chứng minh rằng: $\widehat{BAD} = \widehat{EFD}$.

b) Gọi H, K lần lượt là trung điểm của $AB; EF$. Chứng minh $HK \perp KD$.

Bài 5: Cho tập hợp X có hữu hạn các phần tử. Gọi $A_1; A_2; A_3; \dots; A_{100}$ là các tập hợp con của X và $|A_i| > \frac{|X|}{2}, i = 1, 2, 3, \dots, 100$. Chứng minh rằng: tồn tại một tập hợp con A của X sao cho $|A| \leq 6$ và $|A \cap A_i| \geq 1, i = 1, 2, 3, \dots, 100$.

2. Lời giải

Bài 1:

a) Cho hàm số đa thức $f(x)$ có bảng biến thiên như bên dưới:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			$\nearrow 3$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$	

Biết rằng $f(-3) + 1 < 0; f(3) - 3 > 0$. Đặt $g(x) = f(3x), \max_{[-1;1]} g(x) =$

$g(x_1); \min_{[-1;1]} g(x) = g(x_2)$. Tính $x_1 - x_2$

b) Cho hàm số $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - (m-1)x + \frac{7}{11}$. Tìm m để hàm số có đúng hai điểm cực trị trên $(-2; 3)$.

Giải

a) Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $f'(-1) = 0; f''(-1) < 0; f'(1) = 0; f''(1) > 0$

Xét hàm số $g(x) = f(3x)$ trên $[-1; 1]$ ta có:

$$g'(x) = 3f'(3x) \quad \forall x \in [-1; 1]$$

Vì $\max_{[-1;1]} g(x) = g(x_1); \min_{[-1;1]} g(x) = g(x_2)$ nên $g'(x_1) = 0; g'(x_2) = 0$ hoặc

$x_1; x_2 \in \{1; -1\}$.

Ta có:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow [f(3x)]' = 0$$

$$\Leftrightarrow 3f'(3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -1 \\ 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \text{ (nhận)} \\ x = \frac{1}{3} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} g(1) &= f(3) > 3 \\ g(-1) &= f(-3) < -1 \\ g\left(\frac{1}{3}\right) &= f(1) = -1 \\ g\left(-\frac{1}{3}\right) &= f(-1) = 3 \end{aligned}$$

Vậy ta được $\max_{[-1;1]} g(x) = g(x_1) = g(1)$; $\min_{[-1;1]} g(x) = g(x_2) = g(-1)$ hay $x_1 = 1$; $x_2 = -1 \Rightarrow x_1 - x_2 = 2$.

b) Xét hàm số $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - (m-1)x + \frac{7}{11}$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$y' = x^4 - 2x^2 - (m-1) = (x^2 - 1)^2 - m \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Để hàm số có cực trị thì phương trình $y' = 0$ có nghiệm hay $m \geq 0$

Trường hợp 1: $m = 0$. Phương trình có các nghiệm kép $y = \pm 1$ (loại)

Trường hợp 2: $m = 1$. Phương trình có các nghiệm $x = 0$ (kép); $x = \pm\sqrt{2}$ (đơn) và $-2 < -\sqrt{2} < \sqrt{2} < 3$. Do đó $m = 1$ thỏa ycbt

Trường hợp 3: $m > 1$. Đặt $t = x^2$ ($t > 0$). Phương trình viết lại thành:

$$t^2 - 2t - m + 1 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm $t_1 > 0$ (nhận); $t_2 < 0$ (loại). Vậy trong trường hợp này, ta nhận được hai điểm cực trị của hàm số là $-\sqrt{t_1}$ và $\sqrt{t_1}$. Để hai điểm cực trị này thỏa ycbt thì $0 < \sqrt{t_1} < 2 \Rightarrow 0 < t_1 < 4$

Vậy ta đi tìm điều kiện của m để phương trình $t^2 - 2t - m + 1 = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_2 < 0 < t_1 < 4$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (t_1 - 4)(t_2 - 4) > 0 \\ &\Leftrightarrow t_1 t_2 - 4(t_1 + t_2) + 16 > 0 \\ &\Leftrightarrow -m + 1 - 4 \cdot 2 + 16 > 0 \\ &\Leftrightarrow -m + 9 > 0 \\ &\Leftrightarrow m < 9 \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta được $1 < m < 9$.

Trường hợp 4: $0 < m < 1$. Khi đó phương trình $t^2 - 2t - m + 1 = 0$ có hai nghiệm dương $0 < t_1 < t_2$. Do đó hàm số có bốn điểm cực trị là $-\sqrt{t_2} < -\sqrt{t_1} < 0 < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2}$. Khi đó để hàm số có đúng hai điểm cực trị thỏa mãn yêu cầu bài toán thì có thể xảy ra ba trường hợp sau:

$$\text{Th1': } -2 < -\sqrt{t_2} < -\sqrt{t_1} < 0 < 3 < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2}$$

Khi đó, do $3 < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2}$ nên $t_1 + t_2 > 9 + 9 = 18 > 2$ (mâu thuẫn định lý Viète)

$$\text{Th2': } -\sqrt{t_2} < -2 < -\sqrt{t_1} < 0 < \sqrt{t_1} < 3 < \sqrt{t_2}$$

Khi đó, do $\sqrt{t_2} > 3$ nên $t_2 + t_1 > 9 + t_1 > 2$ (mâu thuẫn định lý Viète)

$$\text{Th3': } -\sqrt{t_2} < -\sqrt{t_1} < -2 < 0 < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2} < 3$$

Khi đó, ta được $4 < t_1 < t_2 < 9$ hay $t_1 + t_2 > 2$ (mâu thuẫn định lý Viète)

Vậy từ các trường hợp trên, ta được $1 \leq m < 9$

Bài 2:

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + \sqrt{5x} = \sqrt{3x+6} + \sqrt{3x-4}$

b) Giải bất phương trình:

$$\frac{x - \sqrt{x} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)}} \geq 1$$

Giải

a) Điều kiện: $x \geq \frac{4}{3}$

Bình phương hai vế của phương trình, ta được:

$$\begin{aligned} 6x + 2 + 2\sqrt{5x^2 + 10x} &= 6x + 2 + 2\sqrt{9x^2 + 6x - 24} \\ \Leftrightarrow 5x^2 + 10x &= 9x^2 + 6x - 24 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x+2)(x-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x-3=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ (loại)} \\ x=3 \text{ (nhận)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) Điều kiện: $x \geq 0$. Bất phương trình viết lại:

$$\frac{x - \sqrt{x} - 2 + \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)}}{\frac{3}{2} - \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)}} \geq 0$$

Do $\frac{3}{2} - \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} \leq \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{7}{2}} < 0$ nên bất phương trình tương đương:

$$x - \sqrt{x} - 2 + \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} \leq 0 \quad (1)$$

Ta đi chứng minh $x - \sqrt{x} - 2 + \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} \geq 0 \quad (2)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} - \sqrt{x} \geq 2 - x \quad (3)$$

$$2x^2 - 7x + 8 = 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + 4\right) = 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{7}{4} \cdot x + \frac{49}{16} + \frac{15}{16}\right) > 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 8 > x \Rightarrow \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} > \sqrt{x}$$

Trường hợp 1: $0 \leq x \leq 2$. Khi đó ta được:

Khi đó:

$$(***) \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 8 - 2\sqrt{2x(x^2 - 3x + 4)} \geq x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 4 - 2\sqrt{2x(x^2 - 3x + 4)} \geq 0 \quad (4)$$

Ta có:

$$x^2 - x + 4 - 2\sqrt{2x(x^2 - 3x + 4)} \geq x^2 - x + 4 - (2x + x^2 - 3x + 4) = 0$$

Dấu "=" xảy ra tại $x = 1$

Vậy (4) đúng.

Trường hợp 2: $x > 2$. Khi đó ta được:

$$VT(3) > 0 > VP(3)$$

Vậy trong mọi trường hợp, ta luôn có (3) đúng. Kết hợp với (2) ta được dấu " $=$ " phải xảy ra hay $x = 1$ là nghiệm duy nhất của bất phương trình.

Bài 3: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 2; u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2024} + \frac{2023}{2024}u_n, n \in \mathbb{N}^*$

- a) Chứng minh $u_n > 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$ và dãy (u_n) tăng.
b) Đặt $v_n = \frac{u_n}{u_{n+1}-1}$. Chứng minh $v_1 + v_2 + \dots + v_n < 2024 \forall n \in \mathbb{N}^*$

Giải

- a) Ta có: $u_1 > 1 \Rightarrow u_2 = \frac{u_1^2}{2024} + \frac{2023}{2024}u_1 > 1$

Giả sử khẳng định đúng đến $n = k$. Xét $n = k + 1$, ta có:

$$u_{k+1} = \frac{u_k^2}{2024} + \frac{2023}{2024}u_k > 1$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta được $u_n > 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2024} + \frac{2023}{2024}u_n - u_n = \frac{1}{2024}u_n(u_n - 1) > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy $u_{n+1} > u_n \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay dãy (u_n) tăng

- b) Ta có:

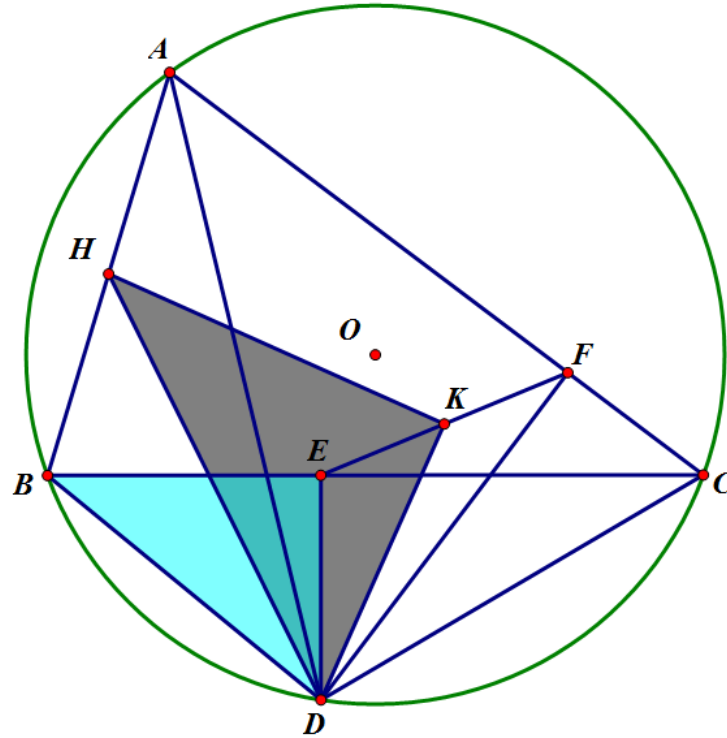
$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{(u_n - 1)(u_n + 2024)}{2024} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 1} &= \frac{2024}{2025} \left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n + 2024} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{2025}{u_{n+1} - 1} &= \frac{2024}{u_n - 1} - \frac{2024}{u_n + 2024} \\ \Leftrightarrow \frac{2024}{u_n + 2024} &= \frac{2024}{u_n - 1} - \frac{2025}{u_{n+1} - 1} \\ \Leftrightarrow \frac{2024}{u_n + 2024} + \frac{1}{u_n - 1} &= 2025 \left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{2025u_n}{(u_n + 2024)(u_n - 1)} &= 2025 \left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{u_n}{(u_n + 2024)(u_n - 1)} &= \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\ \Leftrightarrow \frac{u_n}{u_n^2 + 2023u_n - 2024} &= \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\ \Leftrightarrow \frac{u_n}{2024u_{n+1} - 2024} &= \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\ \Leftrightarrow v_n &= 2024 \left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = 2024 \left(\frac{1}{u_1-1} - \frac{1}{u_2-1} + \frac{1}{u_2-1} - \frac{1}{u_3-1} + \frac{1}{u_3-1} - \frac{1}{u_4-1} + \dots + \frac{1}{(u_n-1)} - \frac{1}{u_{n+1}-1} \right) = 2024 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}-1} \right) < 2024 \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ (đpcm)}$$

Bài 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB < AC$. D là điểm nằm trên cung nhỏ BC (D khác B, C) và $DB < DC$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D lên đường thẳng BC, AC .

- a) Chứng minh rằng: $\widehat{BAD} = \widehat{EFD}$.
b) Gọi H, K lần lượt là trung điểm của $AB; EF$. Chứng minh $HK \perp KD$.

Giải



- a) Do $\widehat{DEC} = \widehat{DFC} = 90^\circ$ nên tứ giác $DEFC$ nội tiếp.
Vì vậy $\widehat{EFD} = \widehat{ECD} = \widehat{BCD} = \widehat{BAD}$
b) Do $\widehat{EDF} = \widehat{ECF} = \widehat{BCA} = \widehat{BDA}$; $\widehat{DFE} = \widehat{DAB}$ nên $\triangle DEF \sim \triangle DBA$ (g.g)
Khi đó ta được:

$$\frac{DE}{DB} = \frac{EF}{BA} = \frac{EK}{BH}; \widehat{DEK} = \widehat{DBH}$$

Hay $\triangle DEK \sim \triangle DBH$ (c.g.c) $\Rightarrow \frac{DE}{DB} = \frac{DK}{DH} \Rightarrow \frac{DE}{DK} = \frac{DB}{DH}$; $\widehat{EDK} = \widehat{BDH} \Rightarrow \widehat{KDH} = \widehat{EDB}$. Vậy $\triangle DEB \sim \triangle DKH$ (c.g.c) hay $\widehat{DKH} = \widehat{DEB} = 90^\circ \Rightarrow HK \perp KD$ (đpcm).

Bài 5: Cho tập hợp X có hữu hạn các phần tử. Gọi $A_1; A_2; A_3; \dots; A_{100}$ là các tập hợp con của X và $|A_i| > \frac{|X|}{2}, i = 1, 2, 3, \dots, 100$. Chứng minh rằng: tồn tại một tập hợp con A của X sao cho $|A| \leq 6$ và $|A \cap A_i| \geq 1, i = 1, 2, 3, \dots, 100$.

Giải

Đặt $|X| = n$. Khi đó, tổng tất cả số lượng phần tử của 100 tập này luôn lớn hơn $50n$. Do đó, tồn tại phần tử a nằm trong X và nằm trong ít nhất 51 tập hợp trong 100 tập này.

Xét 49 tập hợp còn lại, do 49 tập hợp này có tổng số phần tử lớn hơn $\frac{49n}{2} > 24n$ nên tồn tại phần tử b nằm trong X và nằm trong ít nhất 25 tập hợp trong 49 tập này.

Xét 24 tập hợp còn lại, tổng số phần tử của 24 tập này lớn hơn $12n$ nên tồn tại phần tử c nằm trong X và nằm trong ít nhất 13 tập hợp trong 24 tập này.

Xét 11 tập hợp còn lại, tổng số phần tử của 11 tập này lớn hơn $\frac{11}{2}n > 5n$ nên tồn tại phần tử d nằm trong X sao cho d nằm trong ít nhất 6 tập hợp trong 11 tập này.

Xét 5 tập còn lại, bằng lập luận tương tự, luôn tìm được phần tử e nằm trong X thỏa mãn e nằm trong ít nhất 3 tập hợp trong 5 tập này.

Xét hai tập hợp cuối cùng, luôn có một phần tử f nằm trong X đồng thời nằm trong hai tập này.

Vậy $A = \{a; b; c; d; e; f\}$ là tập cần tìm.