

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{x-2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}-2} + \frac{2}{x+\sqrt{x}} \right) \cdot (\sqrt{x}+1) \text{ với } x > 0 \text{ và } x \neq 4.$$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các số chính phương x để P là số nguyên.

2. Cho $n > 1$ là số nguyên dương, chứng minh rằng:

a) $\frac{n-1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^n}.$

b) $\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{n-1}{2^n} < 1.$

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Một xe máy xuất phát từ địa điểm A đến địa điểm B, sau đó 45 phút một xe ô tô cũng xuất phát từ địa điểm A đi đến địa điểm B với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 30 (km/h). Cả hai xe đến địa điểm B cùng một lúc. Biết hai địa điểm A và B cách nhau 100 (km) và vận tốc của mỗi xe là không đổi. Tìm vận tốc của mỗi xe.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = \frac{1}{2}x - 3$ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B.

a) Tìm tọa độ của A, B.

b) Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $M(2; -2)$ và cắt đoạn thẳng OA tại C sao cho diện tích tam giác AMC bằng 5.

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Chứng minh rằng $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ là số chính phương với mọi số nguyên n .

2. Giải phương trình $3\sqrt{x-1} = 4 - 2x + \sqrt{x+7}.$

3. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa $a+b+c=1$.

a) Chứng minh rằng $1 \leq \sqrt{8a+1} \leq 3.$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \sqrt{8a+1} + \sqrt{8b+1} + \sqrt{8c+1}.$

Câu 4. (4,0 điểm)

1. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ và $AB = 8$ (cm), $AD = 6$ (cm), $CD = 10$ (cm). Gọi M là trung điểm BC, H thuộc CD sao cho BH vuông góc với CD. Tính độ dài BC và chứng minh tam giác AHM vuông.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AC > AB$. Trên cạnh AC lấy điểm M (khác với A, C), vẽ tam giác MCP vuông tại C và MP song song với BC. Gọi N là điểm sao cho MCPN là hình chữ nhật, Q là giao điểm của MP và BN.

a) Chứng minh rằng Q là trung điểm của BN.

b) Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh AC thì Q luôn thuộc đường trung tuyến AE của tam giác ABC.

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC có góc B tù, $AC > AB$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC; D là chân đường phân giác trong của BAC ($D \in BC$).

- a) Chứng minh rằng A, M, N, O cùng thuộc một đường tròn.
- b) Gọi I là giao điểm của AD và MN , đường thẳng qua I vuông góc với AD cắt BC tại S . Chứng minh rằng tam giác ASD cân.
- c) Chứng minh rằng SA là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- d) Gọi E là điểm đối xứng với M qua B , đường tròn ngoại tiếp tam giác CME cắt AC tại F . Đường thẳng SA cắt FE, FM lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng $AP = AQ$.

--- HẾT ---

Họ và tên thí sinh: _____

Số báo danh: _____

Chữ ký CBCT 1: _____

Chữ ký CBCT 2: _____

HƯỚNG DẪN CHẤM

(HDC gồm có 06 trang)

I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu 1. (4,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}-2} + \frac{2}{x+\sqrt{x}} \right) \cdot (\sqrt{x}+1) \text{ với } x > 0 \text{ và } x \neq 4.$	2,0
a) Rút gọn biểu thức P.	1,0
Ta có $P = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot (\sqrt{x}+1)$	0,5
$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot (\sqrt{x}+1)$	0,25
$P = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$	0,25
b) Tìm tất cả các số chính phương x để P là số nguyên.	1,0
Vì x là số chính phương nên $x = n^2$ ($n \in \mathbb{N}$).	0,25
Suy ra $P = n + \frac{2}{n}$	0,25
Để P nguyên thì $n \in \{1; 2\}$	0,25
So sánh điều kiện ta được $x = 1$.	0,25
2. Cho $n > 1$ là số nguyên dương, chứng minh rằng:	2,0
a) $\frac{n-1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^n}$.	1,0
Ta có $\frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^n} = \frac{2n}{2^n} - \frac{n+1}{2^n}$	0,5
$= \frac{n-1}{2^n}$	0,5
b) $\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{n-1}{2^n} < 1$.	1,0

Áp dụng ý a) ta có $\frac{1}{2^2} = \frac{2}{2^1} - \frac{3}{2^2}$	0,25
$\frac{2}{2^3} = \frac{3}{2^2} - \frac{4}{2^3}$	0,25
...	
$\frac{n-1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^n}$	0,25
Cộng theo vế ta được $\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{n-1}{2^n} = \frac{2}{2^1} - \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^2} - \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^n} = 1 - \frac{n+1}{2^n} < 1$	0,25

Câu 2. (4,0 điểm)

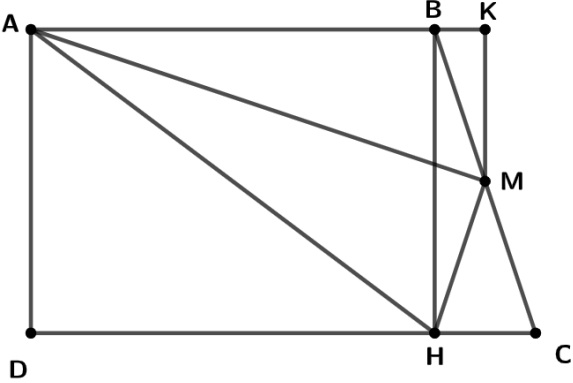
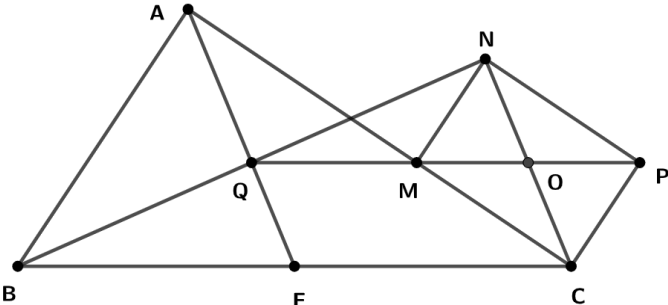
NỘI DUNG	ĐIỂM
1. Một xe máy xuất phát từ địa điểm A đến địa điểm B, sau đó 45 phút một xe ô tô cũng xuất phát từ địa điểm A đi đến địa điểm B với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 30 (km/h). Cả hai xe đến địa điểm B cùng một lúc. Biết hai địa điểm A và B cách nhau 100 (km) và vận tốc của mỗi xe là không đổi. Tìm vận tốc của mỗi xe.	2,0
Gọi x (km/h) là vận tốc xe máy ($x > 0$).	0,25
Vận tốc của xe ô tô là $x + 30$ (km/h).	0,25
Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{100}{x}$ (h)	0,25
Thời gian xe ô tô đi từ A đến B là $\frac{100}{x+30}$ (h)	0,25
Ta có phương trình $\frac{100}{x} - \frac{100}{x+30} = \frac{3}{4}$	0,25
$\Leftrightarrow 3x^2 + 90x - 12000 = 0$	0,25
$\Leftrightarrow x = 50$ hoặc $x = -80$ (loại)	0,25
Vậy vận tốc xe máy là 50 (km/h) và vận tốc ô tô là 80 (km/h)	0,25
2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = \frac{1}{2}x - 3$ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B.	2,0
a) Tìm tọa độ của A, B.	1,0
Xét $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow B(0; -3)$	0,5
Xét $y = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A(6; 0)$	0,5
b) Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $M(2; -2)$ và cắt đoạn thẳng OA tại C sao cho diện tích tam giác AMC bằng 5.	1,0
Gọi H là chân đường cao của M trong ΔAMC , suy ra $MH = 2$.	0,25
Ta có $S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}MH.AC = 5$, suy ra $AC = 5$. Vì C thuộc đoạn OA nên $C(1; 0)$.	0,25
Giả sử $(\Delta): y = ax + b$, khi đó $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$	0,25

Suy ra $(\Delta): y = -2x + 2$.	0,25
----------------------------------	------

Câu 3. (4,0 điểm)

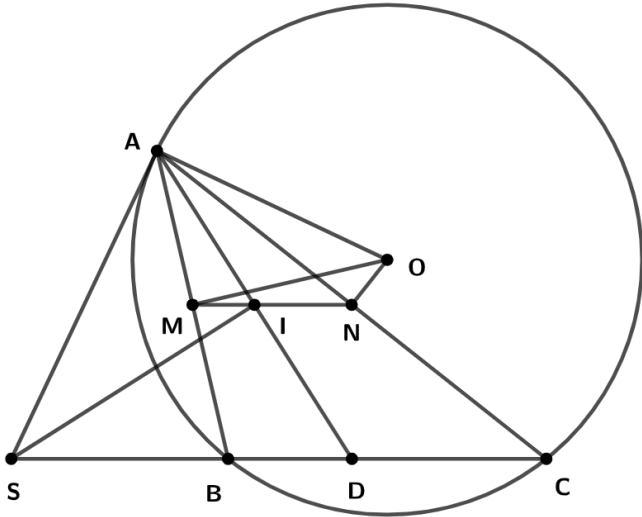
NỘI DUNG	ĐIỂM
1. Chứng minh rằng $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ là số chính phương với mọi số nguyên n.	1,5
Ta có $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$	0,5
$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)+1$	0,5
$= (n^2+3n+1)^2$.	0,5
2. Giải phương trình $3\sqrt{x-1} = 4-2x+\sqrt{x+7}$.	1,5
Điều kiện $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$.	0,25
Ta có $3\sqrt{x-1} - \sqrt{x+7} = 4-2x$	0,25
$\Leftrightarrow \frac{(3\sqrt{x-1})^2 - (\sqrt{x+7})^2}{3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+7}} = 4-2x$	0,25
$\Leftrightarrow \frac{8(x-2)}{3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+7}} = -2(x-2)$	0,25
$\Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{8}{3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+7}} + 2 \right] = 0$	0,25
$\Leftrightarrow x=2$ (vì $\frac{8}{3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+7}} + 2 > 0$) Vậy phương trình có nghiệm là $x=2$.	0,25
3. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa $a+b+c=1$.	1,0
a) Chứng minh rằng $1 \leq \sqrt{8a+1} \leq 3$.	0,5
Ta có $0 \leq a, b, c \leq 1$	0,25
Suy ra $1 \leq 8a+1 \leq 9$ hay $1 \leq \sqrt{8a+1} \leq 3$.	0,25
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \sqrt{8a+1} + \sqrt{8b+1} + \sqrt{8c+1}$.	0,5
Theo kết quả a) ta có $(\sqrt{8a+1}-1)(3-\sqrt{8a+1}) \geq 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{8a+1} \geq 2a+1$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $a=1$.	0,25
Tương tự ta có $\sqrt{8b+1} \geq 2b+1$ và $\sqrt{8c+1} \geq 2c+1$. Cộng dồn các bất đẳng thức ta được $M = \sqrt{8a+1} + \sqrt{8b+1} + \sqrt{8c+1} \geq 2(a+b+c) + 3 = 5$ Vậy GTNN của M bằng 5 khi và chỉ khi $a=1, b=c=0$ hoặc $b=1, a=c=0$ hoặc $c=1, a=b=0$.	0,25

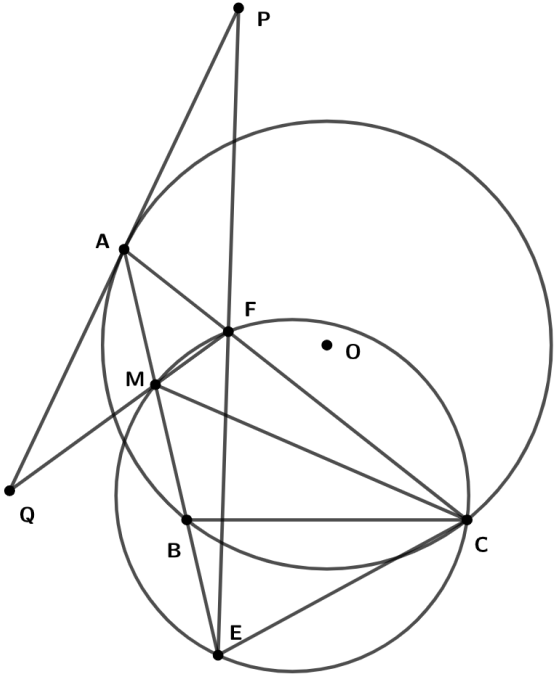
Câu 4. (4,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
1. Cho hình thang $ABCD$ có $A = D = 90^\circ$ và $AB = 8$ (cm), $AD = 6$ (cm), $CD = 10$ (cm). Gọi M là trung điểm BC, H thuộc CD sao cho BH vuông góc với CD. Tính độ dài BC và chứng minh tam giác AHM vuông.	2,0
	
Ta có $ABHD$ là hình chữ nhật, suy ra $BH = AD = 6$ (cm)	0,25
$HC = 2$ (cm).	0,25
Khi đó $BC = \sqrt{BH^2 + HC^2}$.	0,25
$= 2\sqrt{10}$ (cm)	0,25
Ta có $AH = \sqrt{AD^2 + DH^2} = 10$ (cm), $MH = \frac{BC}{2} = \sqrt{10}$ (cm).	0,25
Gọi K thuộc đường thẳng AB sao cho MK vuông góc với AB , suy ra $BK = \frac{HC}{2} = 1$ (cm), $MK = \frac{AD}{2} = 3$ (cm) $\Rightarrow AK = 9$ (cm).	0,25
Ta có $AM = \sqrt{AK^2 + MK^2} = 3\sqrt{10}$ (cm).	0,25
Do đó $AM^2 + MH^2 = (3\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = 100 = AH^2$. Vậy tam giác AMH vuông tại M .	0,25
2. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AC > AB$. Trên cạnh AC lấy điểm M (khác với A, C), vẽ tam giác MCP vuông tại C và MP song song với BC. Gọi N là điểm sao cho $MCPN$ là hình chữ nhật, Q là giao điểm của MP và BN.	2,0
a) Chứng minh rằng Q là trung điểm của BN .	1,0
	
Gọi O là giao điểm của NC và MP . Khi đó O là trung điểm của NC .	0,5
Xét tam giác BNC có $OQ \parallel BC$ và O là trung điểm của NC nên Q là trung điểm BN .	0,5
b) Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh AC thì Q luôn thuộc đường trung tuyến AE của tam giác ABC .	1,0

Xét tam giác BNC , ta có QE là đường trung bình, suy ra $EQ \parallel NC$. (1)	0,25
Do $MCPN$ là hình chữ nhật nên $QMA = CMO = OCM$. Mặt khác $QMA = ECA$ (đồng vị), suy ra $OCM = ECA$. (2)	0,25
Vì tam giác ABC vuông nên $EAC = ECA$. (3)	0,25
Từ (2), (3) suy ra $OCM = EAC$, kéo theo $AE \parallel NC$. (4)	0,25
Từ (1), (4) suy ra Q thuộc AE	

Câu 5. (4,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Cho tam giác ABC có góc B tù, $AC > AB$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC; D là chân đường phân giác trong của BAC ($D \in BC$).	4,0
	
a) Chứng minh rằng A, M, N, O cùng thuộc một đường tròn.	1,0
Vì M là trung điểm AB nên $OM \perp AB$.	0,25
Suy ra M thuộc đường tròn đường kính AO .	0,25
Tương tự N thuộc đường tròn đường kính AO .	0,25
Vậy A, M, N, O thuộc đường tròn đường kính AO .	0,25
b) Gọi I là giao điểm của AD và MN, đường thẳng qua I vuông góc với AD cắt BC tại S. Chứng minh rằng tam giác ASD cân.	1,0
Xét tam giác BAD có M là trung điểm của AB và $MI \parallel BD \Rightarrow I$ là trung điểm AD .	0,5
Do $SI \perp AD$ và $IA = ID$ nên tam giác ASD cân tại S .	0,5
c) Chứng minh rằng SA là tiếp tuyến của đường tròn (O).	1,0
Ta có SDA là góc ngoài tam giác ADC nên $SDA = DAC + DCA$.	0,25
Mặt khác $SAD = SAB + BAD$	0,25
Do $BAD = DAC$ nên $SAB = DCA$.	0,25
Suy ra SA là tiếp tuyến của (O) .	0,25
d) Gọi E là điểm đối xứng với M qua B, đường tròn ngoại tiếp tam giác CME cắt AC tại F. Đường thẳng SA cắt FE, FM lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng	1,0

$AP = AQ$.	
	
Gọi (CME) là đường tròn ngoại tiếp tam giác CME. Xét (CME), ta có $EMC = EFC = AFP$. Xét (O), ta có AP là tiếp tuyến nên $PAC = ABC$. Do đó $\triangle PAF \sim \triangle CBM$ suy ra $\frac{PA}{CB} = \frac{AF}{BM}$. (1)	0,25
Xét (O), ta có AQ là tiếp tuyến nên $QAC = \frac{1}{2}\text{sd}ABC$, mà $EBC = 180^\circ - ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\text{sd}AC = \frac{1}{2}\text{sd}ABC$. Suy ra $QAC = EBC$. (2)	0,25
Xét (CME), ta có $AFQ = 180^\circ - MFC = 180^\circ - \frac{1}{2}\text{sd}MEC = \frac{1}{2}\text{sd}MFC = CEM$. (3) Từ (2), (3) suy ra $\triangle QAF \sim \triangle CBE$ suy ra $\frac{QA}{CB} = \frac{AF}{BE}$. (4)	0,25
Từ (1), (4) và $MB = BE$ suy ra $AQ = AP$.	0,25

--- HẾT ---