

**Câu 1. (6,0 điểm)**

a) Giải phương trình:  $x^2 + 2(2 + \sqrt{x-1}) = 5x$

b) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 5 + 2xy + 2x - 2y \\ 2x^2 + y^2 = 10 + 2x - 3y \end{cases}$$

**Câu 2. (3,0 điểm)**

a) Tìm  $x, y \in \mathbb{N}$  sao cho  $x^3 = 1993.3^y + 2021$

b) Tìm số nguyên dương  $n$  để  $\frac{n-23}{n+89}$  là bình phương của một số hữu tỉ dương.

**Câu 3. (2,0 điểm)** Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $ab + bc + ca \leq 3abc$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} - \left( \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}} \right)$$

**Câu 4. (7,0 điểm)** Cho đường tròn  $(O)$  có dây cung  $BC$  cố định và không đi qua tâm  $O$ . Gọi  $A$  là điểm di động trên đường tròn  $(O)$  sao cho tam giác  $ABC$  nhọn và  $AB < AC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$  và  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ . Tia  $MH$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $K$ , đường thẳng  $AH$  cắt cạnh  $BC$  tại  $D$  và đường thẳng  $AO$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E$  ( $E$  khác  $A$ ).

a) Chứng minh rằng tứ giác  $BHCE$  là hình bình hành và  $HA.HD = HK.HM$ .

b) Tia  $KD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $I$  ( $I$  khác  $K$ ), đường thẳng đi qua  $I$  và vuông góc với đường thẳng  $BC$  cắt  $AM$  tại  $J$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $AK, BC$  và  $HJ$  cùng đi qua một điểm.

c) Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với  $AK$  tại  $A$  và cắt các cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $P, Q$  phân biệt. Gọi  $N$  là trung điểm của  $PQ$ . Chứng minh rằng  $AN$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Câu 5. (2,0 điểm)** Cho số 676 số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng có ít nhất hai số trong các số đã cho mà hiệu của chúng chia hết cho 2022.

♣HẾT♣

## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

### Câu 1. (6,0 điểm)

a) Giải phương trình:  $x^2 + 2(2 + \sqrt{x-1}) = 5x$

b) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 5 + 2xy + 2x - 2y \\ 2x^2 + y^2 = 10 + 2x - 3y \end{cases}$$

#### Lời giải

a) Giải phương trình:  $x^2 + 2(2 + \sqrt{x-1}) = 5x$

$$x^2 + 2(2 + \sqrt{x-1}) = 5x \quad \text{Điều kiện: } x \geq 1$$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 3(x-1) + 2\sqrt{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 3(x-1) + 2\sqrt{x-1} = 0 \quad (1)$$

Đặt:  $\sqrt{x-1} = t \ (t \geq 0)$ . Khi đó, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow t^4 - 3t^2 + 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow t(t^3 - 3t + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t(t-1)^2(t+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \\ t=-2(\text{loại}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=0 \\ \sqrt{x-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \quad (tm)$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $S = \{1; 2\}$

b) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 5 + 2xy + 2x - 2y & (1) \\ 2x^2 + y^2 = 10 + 2x - 3y & (2) \end{cases}$$

Lấy  $2 \times (1) - (2)$  ta có pt:  $4x^2 + y^2 = 4xy + 2x - y$

$$\Leftrightarrow (2x-y)^2 = 2x-y \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

+ **Trường hợp 1:**  $y = 2x$  thay vào (2) ta được:  $x^2 = 10 + 2x - 6x$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 4x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=\frac{-5}{3} \Rightarrow y=\frac{-10}{3} \end{cases}$$

+ **Trường hợp 2:**  $y = 2x - 1$  thay vào (2) ta được:  $2x^2 + (2x-1)^2 = 10 + 2x - 3(2x-1)$

$$\Leftrightarrow 6x^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \Rightarrow y=2\sqrt{2}-1 \\ x=-\sqrt{2} \Rightarrow y=-2\sqrt{2}-1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm:  $(x; y) \in \left\{ (1; 2), \left(-\frac{5}{3}; -\frac{10}{3}\right), (\sqrt{2}; 2\sqrt{2}-1), (-\sqrt{2}; -2\sqrt{2}-1) \right\}$

**Câu 2. (3,0 điểm)**a) Tìm  $x, y \in \mathbb{N}$  sao cho  $x^3 = 1993.3^y + 2021$ b) Tìm số nguyên dương  $n$  để  $\frac{n-23}{n+89}$  là bình phương của một số hữu tỉ dương.**Lời giải**a) Tìm  $x, y \in \mathbb{N}$  sao cho  $x^3 = 1993.3^y + 2021$ 

$$x^3 = 1993.3^y + 2021$$

$$y = 0 \Rightarrow x^3 = 4014 \text{ (loại).}$$

$$y = 1 \Rightarrow x^3 = 8000 \Rightarrow x = 20$$

$$y \geq 2$$

$$VP \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow VT \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow x^3 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow x \equiv 2 \pmod{3}.$$

$$x = 3k + 2, (k \in \mathbb{N}).$$

$$(3k + 2)^3 = 1993.3^y + 2021$$

$$\Leftrightarrow 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 = 1993.3^y + 2021$$

$$\Leftrightarrow 9k(3k^2 + 6k + 4) = 1993.3^y + 2013$$

$$VT \equiv 0 \pmod{9}$$

$$VP \equiv 6 \pmod{9}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = (20; 1).$$

b) Tìm số nguyên dương  $n$  để  $\frac{n-23}{n+89}$  là bình phương của một số hữu tỉ dương.Giả sử  $\frac{n-23}{n+89} = \left(\frac{q}{p}\right)^2$  với  $p, q$  là 2 số nguyên dương và  $(p; q) = 1$ 

$$\text{Ta có: } \begin{cases} n-23 = kq^2 \\ n+89 = kp^2 \end{cases} \text{ (với } k \text{ là số nguyên dương).}$$

$$\Rightarrow k(p-q)(p+q) = 112 = 2^4.7.1 \quad (1)$$

**+ Trường hợp 1:** Trong 2 số  $p, q$  có 1 số chẵn và 1 số lẻ

$$\Rightarrow p+q \text{ và } p-q \text{ đều lẻ}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \begin{cases} p+q=7 \\ p-q=1 \\ k=2^4=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=4 \\ q=3 \\ k=16 \end{cases} \Rightarrow n=167.$$

**+ Trường hợp 2:** Cả  $p, q$  đều lẻ. Đặt  $p = 2a-1; q = 2b-1$  Ta có:Với  $p, q$  là các số nguyên dương.

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow k(2a-1-2b+1)(2a-1+2b-1) = 112$$

$$\Rightarrow 4k(a-b)(a+b-1) = 112$$

$$\Rightarrow k(a-b)(a+b-1) = 28 = 2^2 \cdot 7 \cdot 1.$$

Ta có:  $a+b-1 > a-b$  và  $a+b-1; a-b$  khác tính chẵn lẻ.

Xét cặp  $(a-b; a+b-1)$  lần lượt  $(1;2); (1;4); (1;14); (1;28); (2;7); (4;7)$

Tính  $a, b$  suy ra:

$$1. p=3; q=1; k=14 \Rightarrow n=37$$

$$2. p=5; q=3; k=7 \Rightarrow n=86$$

$$3. p=25; q=13; k=2 \Rightarrow n=361$$

$$4. p=11; q=3; k=1 \Rightarrow n=32$$

$$5. p=29; q=27; k=1 \Rightarrow n=361$$

$$6. p=9; q=5; k=2 \Rightarrow n=73$$

$$\text{Vậy } n \in \{167; 37; 86; 361, 32, 752, 73\}$$

### Câu 3. (2,0 điểm)

Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $ab+bc+ca \leq 3abc$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} - \left( \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}} \right)$$

#### Lời giải

$$\text{Vì } ab+bc+ca \leq 3abc \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{a+b} &= \sqrt{\frac{(a+b)^2}{a+b}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{2ab}{a+b}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{2ab}{a+b}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } P &\geq \sqrt{\frac{ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{ac}{a+c}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}} + \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}} + \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}} = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{x+z}} \end{aligned}$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \text{ và } x+y+z \leq 3.$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } &\frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{x+z}} \geq \frac{9}{\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z}} \\ &\geq \frac{9}{\sqrt{3(2x+2y+2z)}} \geq \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 6}} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $x = y = z = 1$  hay  $a = b = c = 1$ .

**Câu 4. (7,0 điểm)**

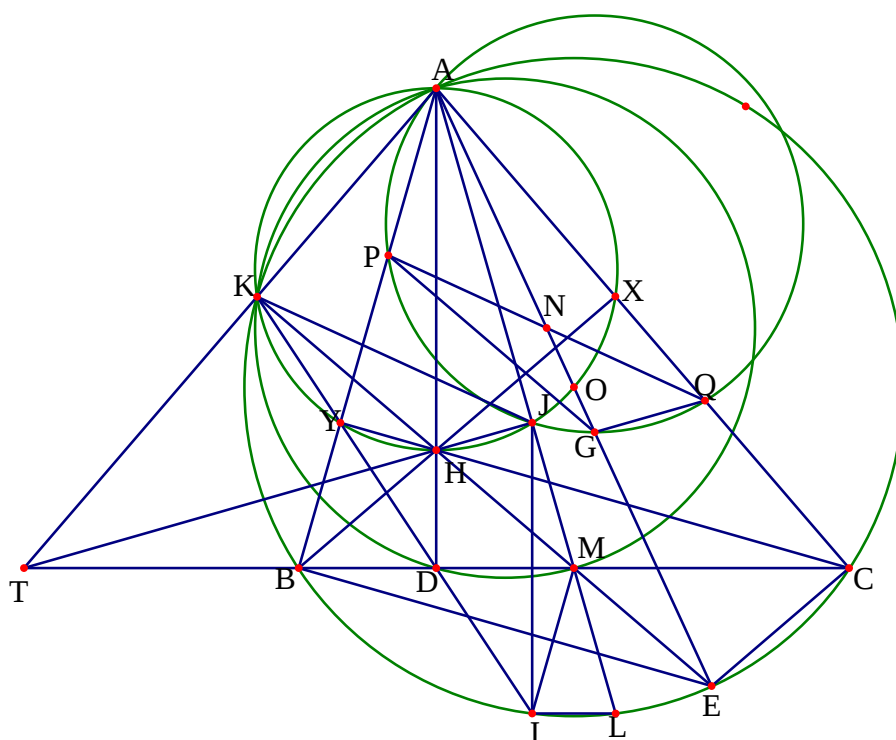
Cho đường tròn  $(O)$  có dây cung  $BC$  cố định và không đi qua tâm  $O$ . Gọi  $A$  là điểm di động trên đường tròn  $(O)$  sao cho tam giác  $ABC$  nhọn và  $AB < AC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$  và  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ . Tia  $MH$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $K$ , đường thẳng  $AH$  cắt cạnh  $BC$  tại  $D$  và đường thẳng  $AO$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E$  ( $E$  khác  $A$ ).

a) Chứng minh rằng tứ giác  $BHCE$  là hình bình hành và  $HA.HD = HK.HM$ .

b) Tia  $KD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $I$  ( $I$  khác  $K$ ), đường thẳng đi qua  $I$  và vuông góc với đường thẳng  $BC$  cắt  $AM$  tại  $J$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $AK$ ,  $BC$  và  $HJ$  cùng đi qua một điểm.

c) Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với  $AK$  tại  $A$  và cắt các cạnh  $AB$ ,  $AC$  lần lượt tại  $P$ ,  $Q$  phân biệt. Gọi  $N$  là trung điểm của  $PQ$ . Chứng minh rằng  $AN$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Lời giải**



**a)** Kẻ các đường cao  $BX$  và  $CY$ . Khi đó ta có  $BE$  song song với  $CH$  (vì cùng vuông góc với  $AB$ ) và  $CE$  song song với  $BH$  (vì cùng vuông góc với  $AC$ ). Do đó tứ giác  $BHCE$  là hình bình hành.

+ Từ đó suy ra bốn điểm  $K$ ,  $H$ ,  $M$ ,  $E$  thẳng hàng. Khi đó ta có  $\widehat{AKM} = \widehat{ADM} = 90^\circ$  nên tứ giác  $AKDM$  nội tiếp. Do đó suy ra  $HA.HD = HK.HM$ .

**b)** Giả sử  $AM$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $L$ . Khi đó ta có các tứ giác  $AKDM$  và  $AKIL$  nội tiếp đường tròn, từ đó ta suy ra được  $\widehat{KDM} = 180^\circ - \widehat{KAM} = 180^\circ - \widehat{KAL} = \widehat{KIL}$  nên  $IL$  song song với  $BC$ . Từ đó suy ra tứ giác  $BILC$  là hình thang cân. Mà  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên  $OM$  đi qua trung điểm của  $IL$ , do đó tam giác  $MIL$  cân tại  $M$ , suy ra ta được  $MI = ML$ . Dễ thấy tam giác  $JIL$  vuông tại  $I$  nên suy ra  $M$  là trung điểm của  $LJ$ , điều này dẫn đến  $I$  và  $J$  đối xứng với nhau qua  $BC$ . Từ đó suy ra tứ giác  $HLEJ$  là hình bình hành, suy ra  $HJ \parallel LE$ . Do đó  $HJ$  vuông góc với  $AM$ .

Gọi  $T$  là giao điểm của  $AK$  với  $BC$ . Khi đó  $H$  là trực tâm của tam giác  $ATM$ . Suy ra  $TH \perp AM$ , suy ra  $T, H, J$  thẳng hàng. Do đó ta có điều cần chứng minh.

**c)** Ta định nghĩa lại điểm  $N$  là giao điểm của  $AO$  với  $PQ$ .

Ta cần chứng minh  $N$  là trung điểm của  $PQ$ .

Thật vậy, gọi  $G$  là giao điểm thứ hai của  $AE$  với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $APQ$ .

Ta có các điểm  $A, P, G, Q$  cùng nằm trên một đường tròn và  $AK$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $APQ$  nên ta có:

$$\widehat{AGP} = \widehat{AQP} = \widehat{PAK} = \widehat{BAK} = \widehat{BEK} = \widehat{BEM}.$$

Đề ý đến các tứ giác  $APGQ$  và  $ABEC$  nội tiếp đường tròn

$$\text{nên ta lại có: } \widehat{QPG} = \widehat{QAG} = \widehat{CAE} = \widehat{CBE} = \widehat{MBE}.$$

Khi đó hai tam giác  $PGN$  và  $BEM$  có  $\widehat{NGP} = \widehat{BEM}$  và  $\widehat{GPN} = \widehat{MBE}$  đồng dạng với

$$\text{nhau, từ đó ta suy ra được } \frac{PN}{BM} = \frac{PG}{BE}.$$

$$\text{Cũng do các tứ giác trên nội tiếp nên } \widehat{PGQ} = 180^\circ - \widehat{PAQ} = 180^\circ - \widehat{BAC} = \widehat{BEC}.$$

Mà  $\widehat{GPQ} = \widehat{CBE}$  nên suy ra hai tam giác  $PGQ$  và  $BEC$  đồng dạng, từ đó ta lại có

$$\frac{PG}{BE} = \frac{PQ}{BC}. \text{ Do đó suy ra } \frac{PN}{BE} = \frac{PQ}{BC}. \text{ Mà } M \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên suy ra } N \text{ là}$$

trung điểm của  $PQ$ . Vậy  $AN$  luôn đi qua điểm  $O$  cố định.

#### **Câu 5. (2,0 điểm)**

Cho số 676 số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng có ít nhất hai số trong các số đã cho mà hiệu của chúng chia hết cho 2022.

#### **Lời giải**

676 số có ít nhất 673 số không chia hết cho 2; 3; 337.

$$673 = 2 \cdot 336 + 1.$$

Suy ra tồn tại 337 số có cùng số dư khi chia 3.

337 số này tồn tại 2 số cùng số dư khi chia hết cho 337.

Hiệu 2 số này chia hết cho 2; 3; 337.

Suy ra hiệu 2 số này chia hết cho 2022.

**HẾT**