

SỞ GD&ĐT LAI CHÂU

ĐỀ THI CHÍNH

KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn thi: TOÁN (môn chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút

Ngày thi: 27/5/2023

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right)$ (với $x > 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A \geq \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}}$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

b) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng (d): $y = -x + m + 1$ cắt (P): $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 - x_2 - 4m + 1 = 0$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x + y)(x - y) + x + 8y = 22$ b) Cho a; b; c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ac}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{3}{2}$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm F, vẽ FE vuông góc với BC tại E. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF. Đường thẳng BF cắt (O) tại điểm thứ hai là D, DE cắt AC tại H.

a) Chứng minh rằng: ABEF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: FH.CA = CH.FA

c) Đường thẳng AD cắt (O) tại điểm thứ hai G, FG cắt CD tại I, CG cắt FD tại K. Chứng minh rằng K, I, H thẳng hàng.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho hình vuông ABCD và 2025 đường thẳng, biết mỗi đường thẳng thỏa mãn hai điều kiện:

i) Luôn cắt hai cạnh đối diện và không đi qua đỉnh nào của hình vuông.

ii) Chia hình vuông thành hai phần có tỉ số diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng trong 2025 đường thẳng đó có ít nhất 507 đường thẳng cùng đi qua một điểm

-----Hết-----

Hướng dẫn giải đề

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} \right] : \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \left[\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right] : \frac{2\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \text{b) } A &\geq \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}\sqrt{2023} + \sqrt{2023} - \sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{2023}}{\sqrt{x}\sqrt{2023}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2023} - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2023 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện $x > 0; x \neq 1$ ta có 2022 giá trị thỏa mãn điều kiện

Câu 2.

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ (x-y+1)(2x-y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ \begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 & (*) \\ x-y+1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 & (**) \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Giải } (*) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ 2y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ \begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Giải } (**) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2x+1)^2 + x + 2x+1 = 8 \\ y=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 7x - 6 = 0 \\ y=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ x=-2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{11}{5} \\ x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $(1;2);(-3;-2);(-2;-3);(\frac{3}{5};\frac{11}{5})$

b) Xét phương trình hoành độ tương giao của (P) và $(d): x^2 = -x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - m - 1 = 0(*)$
để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $x_1; x_2$ thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4(m + 1) > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-5}{4}$$

Ta có $x_1^2 - x_2 - 4m + 1 = 0(1)$

Vì x_1 là nghiệm của $(*)$ suy ra $x_1^2 = -x_1 + m + 1$ thay vào (1) ta được

$$-x_1 + m + 1 - x_2 - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) - 3m + 2 = 0$$

Theo viet ta có: $x_1 + x_2 = -1 \Rightarrow m = 1$ (nhận)

Vậy $m = 1$ thỏa mãn đề bài.

Câu 3.

$$a) (2x + y)(x - y) + x + 8y = 22 \Leftrightarrow (2x + y)(x - y) + 3(2x + y) - 5(x - y) = 22$$

$$\Leftrightarrow (2x + y)(x - y + 3) - 5(x - y + 3) = 7$$

$$\Leftrightarrow (x - y + 3)(2x + y - 5) = 7$$

Khi đó ta có các khả năng sau:

$$\text{KN1: } \begin{cases} x - y + 3 = -7 \\ 2x + y - 5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$\text{KN2: } \begin{cases} x - y + 3 = -1 \\ 2x + y - 5 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{KN3: } \begin{cases} x - y + 3 = 7 \\ 2x + y - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{-2}{3} \end{cases} (l)$$

$$\text{KN4: } \begin{cases} x - y + 3 = 1 \\ 2x + y - 5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{16}{3} \end{cases} (l)$$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x; y) \in \{(-2; 8); (-2; 2)\}$

b) ta có $a + b + c = 3 \Leftrightarrow 9 = (a + b + c)^2 \geq 3(ab + ac + bc) \Leftrightarrow ab + ac + bc \leq 3$

$$\text{ta có } \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} \leq \frac{bc}{(a^2+ab+ac+bc)} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} \right)$$

$$\text{tương tự ta có: } \frac{ac}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c} \right); \frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{b+c} + \frac{ab}{a+c} \right)$$

cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta được:

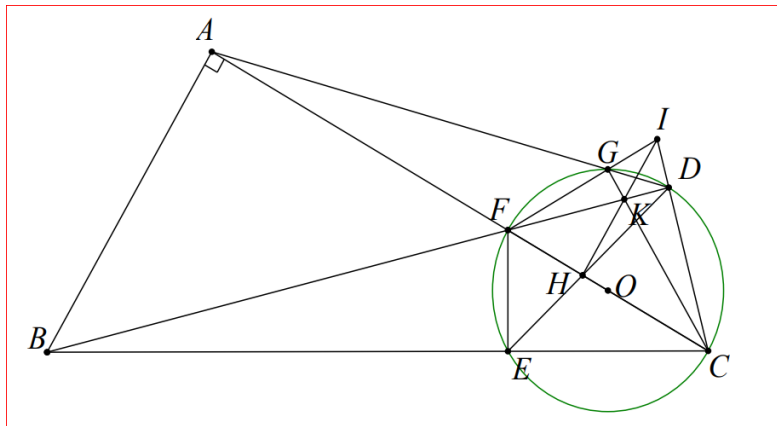
$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ac}{\sqrt{b^2+3}} + \frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} + \frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{ab}{a+c} \right) \leq \frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\text{mà } a+b+c=3 \text{ nên } \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ac}{\sqrt{b^2+3}} + \frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{3}{2}$$

dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$

$$\text{Vậy } \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ac}{\sqrt{b^2+3}} + \frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{3}{2}$$

Câu 4.



a) tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$ hay $\widehat{BAF} = 90^\circ$

ta có: $FE \perp BC$ tại E nên $\widehat{FEB} = \widehat{FEC} = 90^\circ$

xét tứ giác $ABEF$ có $\widehat{BAF} + \widehat{FEB} = 180^\circ$ mà hai góc đối nhau nên $ABEF$ là tứ giác nội tiếp

b) Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{FDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Hay $\widehat{BDC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ mà hai đỉnh kề nên $ABCD$ là tứ giác nội tiếp

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AD}$)

Hay $\widehat{ABF} = \widehat{FCD}$ (1)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABEF$ có $\widehat{ABF} = \widehat{AEF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AF}$) (2)

Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{FCD} = \widehat{FED}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{DF}$) (3)

Từ (1); (2) và (3) ta có $\widehat{FED} = \widehat{AEF}$ nên FE là tia phân giác của $\widehat{AED}$

Xét tam giác AEH có $EF; EC$ là đường phân giác trong và ngoài của tam giác nên

$$\frac{AF}{FH} = \frac{AE}{EH}; \frac{AC}{CH} = \frac{AE}{EH}$$

$$\text{Suy ra } \frac{AF}{FH} = \frac{AC}{CH} \Leftrightarrow AF \cdot CH = FH \cdot AC$$

c) Xét đường tròn (O) có $\widehat{FGC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra $CG \perp FI$

Xét tam giác IFC có $FD; CG$ là hai đường cao mà FD cắt CG tại K suy ra K là trực tâm

Suy ra $IK \perp FC$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{FDA} = \widehat{FCG}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{GF}$)

Mà $\widehat{FDA} = \widehat{BCA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$)

Do đó $\widehat{BCA} = \widehat{FCG}$ hay $\widehat{FCE} = \widehat{FCG}$

Xét $\triangle FEC$ và $\triangle FGC$ có $\widehat{FCE} = \widehat{FCG}$ và $\widehat{FEC} = \widehat{FGC} = 90^\circ$

Suy ra $\triangle FEC \cong \triangle FGC$ (g - g) do đó $GC = EC$

Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{GFC} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{GC}; \widehat{EDC} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{EC}$

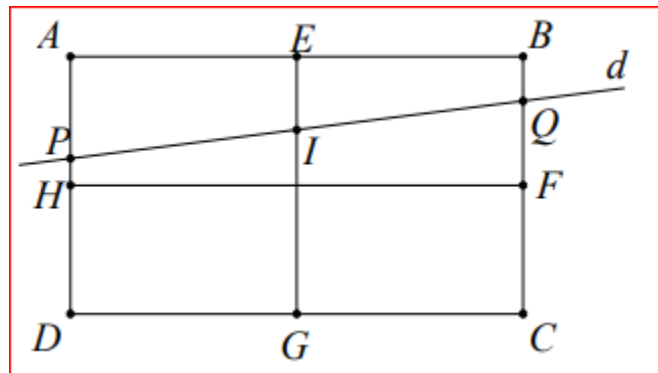
Suy ra $\widehat{GFC} = \widehat{EDC}$ hay $\widehat{IFH} = \widehat{HDC}$

Xét tứ giác $FHDI$ có $\widehat{IFH} = \widehat{HDC}$ mà góc ngoài bằng góc trong đỉnh đối diện nên $FHDI$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\widehat{FHI} = \widehat{FDI} = 90^\circ \Rightarrow IH \perp FC$

Suy ra $K; I; H$ thẳng hàng

Câu 5. Gọi d là đường thẳng trong 2025 đường thẳng thỏa mãn đề bài



Giả sử d cắt $AD; BC$ lần lượt tại $P; Q$ và cắt EG tại I

$E; F; G; H$ là trung điểm các cạnh như hình

$$\text{Mà } S_{DCQP} = 2S_{ABQP} \Rightarrow (DP + QC) = 2(AP + BQ) \Leftrightarrow GI = 2IE \Leftrightarrow GI = \frac{2}{3}GE \text{ suy ra } I \text{ cố định}$$

Khi đó ta có 2025 = 4.506 + 1 các đường thẳng thỏa mãn đề bài phải đi qua 4 điểm cố định khi đó theo nguyên lý Dirichlet thì có 506 + 1 = 507 đường thẳng đi qua một điểm