

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
TRÀ VINH**

NĂM HỌC: 2020 – 2021

MÔN THI: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (4.0 điểm)

Cho biểu thức $M = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \right)$

1. Rút gọn M

2. Tìm x để $M < \frac{1}{2}$.

Câu 2. (2.0 điểm)

Cho $a+b+c=0$. Tính giá trị của biểu thức $N = a^3 + b^3 + c(a^2 + b^2) - abc$

Câu 3. (3.0 điểm)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-4y=5 \\ 2|x-2y|+|x+y+1|=7 \end{cases}$

Câu 4. (3.0 điểm)

Giải phương trình $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$

Câu 5. (2.0 điểm)

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức $P=xyz$.

Câu 6. (4.0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Đặt $AB=c$, $AC=b$.

1. Tính AH, AI, AK theo b, c.

2. Chứng minh $\frac{BI}{CK} = \frac{c^3}{b^3}$

Câu 7. (2.0 điểm)

Từ một điểm A ở ngoài đường tròn tâm O, kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với B, C là các tiếp điểm. Trên đoạn OB lấy điểm N sao cho $BN=2ON$. Đường trung trực của đoạn thẳng CN cắt OA tại M. Tính tỉ số $\frac{AM}{AO}$.

.....HẾT.....

Câu 1.

1) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 9$

$$\begin{aligned} M &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x-3}{x-9} : \frac{\sqrt{x}-3-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{2x-6\sqrt{x}+x+3\sqrt{x}-3x-3}{x-9} : \frac{-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{-3\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-9} : \frac{-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{-3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-9} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{-(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

$$2) M < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 > 6 \Leftrightarrow x > 9$$

Câu 2.

$$\begin{aligned} N &= a^3 + b^3 + c(a^2 + b^2) - abc = a^3 + b^3 + a^2c + b^2c - abc \\ &= (a^3 + a^2c) + (b^3 + b^2c) - abc = a^2(a+c) + b^2(b+c) - abc \\ &= a^2(-b) + b^2(-a) - abc \\ &= -ab(a+b+c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(vì $a+b+c=0 \Rightarrow a+c=-b, b+c=-a$)

Câu 3.

$$\begin{cases} x-4y=5 \\ 2|x-2y|+|x+y+1|=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+4y \\ 2|x-2y|+|x+y+1|=7 \end{cases}$$

Suy ra: $2|x-2y|+|x+y+1|=7$

$$\Leftrightarrow 2|5+4y-2y|+|5+4y+y+1|=7$$

$$\Leftrightarrow 2|5+2y|+|6+5y|=7 \quad (*)$$

$$\text{Nếu } y < -\frac{5}{2} \text{ thì: } (*) \Leftrightarrow -2(5+2y) - (6+5y) = 7 \Leftrightarrow y = \frac{-23}{9} \Rightarrow x = \frac{-47}{9}$$

$$\text{Nếu } -\frac{5}{2} \leq y \leq \frac{-6}{5} \text{ thì: } (*) \Leftrightarrow 2(5+2y) - (6+5y) = 0 \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow x = 21$$

$$\text{Nếu } y \geq \frac{-6}{5} \text{ thì: } (*) \Leftrightarrow 2(5+2y) + (6+5y) = 7 \Leftrightarrow y = \frac{-16}{9} \Rightarrow x = \frac{-19}{9}$$

$$\text{Vậy Hệ có nghiệm } (x; y) = \left(\frac{-47}{9}; \frac{-23}{9} \right) = (21; 4) = \left(\frac{-19}{9}; \frac{-16}{9} \right)$$

Câu 4.

$$(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+5x+2} = 4 \\ \sqrt{x^2+5x+2} = -1 \end{cases}$$

Suy ra $\sqrt{x^2+5x+2} = 4$ (thỏa mãn)

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+5x+2} = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -7 \end{cases}$$

KL: $x=2$; $x=-7$

Câu 5.

Ta có: $\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+y} + 1 - \frac{1}{1+z} = \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}$

Tương tự: $\frac{1}{1+y} \geq 2\sqrt{\frac{zx}{(1+x)(1+z)}}$, $\frac{1}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}$

Nhân ba bất đẳng thức cùng chiều trên với nhau ta được: $xyz \leq \frac{1}{8}$

Suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{8}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$

Câu 6.

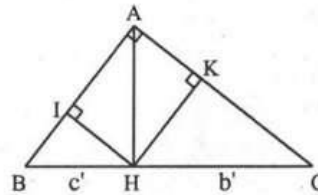
a) Nếu tính được AH thì dễ dàng tính được AI, AK. Muốn vậy ta tính cạnh huyền BC.

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$c' = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}; b' = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$h^2 = b'c' = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}$$

Từ đó ta tính được $AI = \frac{AH^2}{AB} = \frac{b^2c}{b^2 + c^2}$; $AK = \frac{AH^2}{AC} = \frac{bc^2}{b^2 + c^2}$.



Hình 69

$$\text{b) } \frac{c^2}{b^2} = \frac{ac'}{ab'} = \frac{c'}{b'} \Rightarrow \frac{c^4}{b^4} = \frac{c'^2}{b'^2}. \quad (1)$$

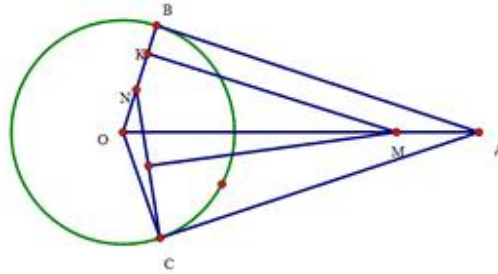
Mặt khác $c'^2 = BH^2 = BA.BI = c.BI$;

$$b'^2 = CH^2 = CA \cdot CK = b \cdot CK.$$

$$\text{Do đó } \frac{c'^2}{b'^2} = \frac{c.BI}{b.CK}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{c.BI}{b.CK} = \frac{c^4}{b^4}$ hay $\frac{BI}{CK} = \frac{c^3}{b^3}$.

Câu 7.



Gọi K là trung điểm của BN. Ta có OA là trung trực của đoạn BC.

Do M thuộc OA nên MB=MC

Do M thuộc trung trục của CN nên $MC=MN$. Suy ra $MB=MN$

Do đó M thuộc trung trực của BN, suy ra $MK \perp BN$

Vì $OB \perp BA$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow MK \parallel AB$

Xét tam giác OBA, theo tính chất Ta-let ta có: $\frac{AM}{AO} = \frac{BK}{BO} = \frac{1}{3}$