

Bài 1. 1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

a) Rút gọn A

b) Chứng minh rằng $A < \frac{2}{3}$

2) Cho $(2x + \sqrt{4x^2 + 1})(3y + \sqrt{9y^2 + 1}) = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = 8x^3 + 27y^3 + 2021$

Bài 2. 1) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 5x + 12} + \sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x + 5$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 4xy = 8 \\ (x+y)(x^2 + xy + 2) = 8 \end{cases}$

3) Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 1$ (m là tham số). Tìm m để (d) cắt

(P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB = \sqrt{10}$

Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A và B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH.

a) Chứng minh rằng $\widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$ b) Chứng minh rằng $\triangle CJH \sim \triangle HIB$ c) Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh rằng $HE \cdot HD = HC^2$ d) Xác định vị trí điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến AD. Điểm M di động trên đoạn AD. Gọi N và P lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M trên AB và AC. Kẻ NH vuông góc với PD tại H. Xác định vị trí của điểm M để tam giác AHB có diện tích lớn nhất.

Bài 5. a) Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{4x^2 - yz + 2} + \frac{1}{4y^2 - zx + 2} + \frac{1}{4z^2 - xy + 2}$

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình $x^2 = y^2(x + y^4 + 2y^2)$